1.6. ЗАКОНЫ СМЕРТНОСТИ

Поскольку функции $s(x)$ и l_x дают общую характеристику процесса вымирания населения, попыткам найти адекватную аналитическую формулу для этих функций придавалось большое значение. Обычно вид этих функций постулировался на основании некоторых демографических гипотез, а затем на основании статистических данных производилась оценка параметров, входящих в эти формулы. Трудность состояла в достижении "достаточно хорошего" соответствия эмпирически получаемым таблицам смертности.

Одна из первых попыток получить аналитическое выражение для $s(x)$ принадлежит де Муавру (1725 г.). Он предположил линейный характер убывания $s(x)$, т.е.

$$s(x)=\frac{\omega-x}{\omega}, \qquad (6.1),$$

где

$$0\le x\le\omega,$$

а ω — заданный предельный возраст. У де Муавра $\omega=86$ годам.

Предположение де Муавра дает для интенсивности смертности выражение

$$\mu_x=\frac{1}{\omega-x} \qquad (6.2)$$

и, как легко показать, дает постоянную плотность распределения $G(x)$, что противоречит опытным данным (см. рис. 2.2.).

В 1825 г. Гомпертц предложил экспоненциальную формулу для силы смертности

$$\mu_x=B\cdot c^x. \qquad (6.3)$$

Закон Гомпертца дает для функции дожития выражение вида

$$l_x=k\cdot g^{c^x}, \qquad (6.4)$$

где

$$\ln g=-\frac{B}{\ln c} \text{ и } k=\frac{l_0}{g}.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$_t p_x = g^{c^x \cdot (c^t - 1)} \;. \qquad (6.5)$$

В 1860 г. Мейкем уточнил формулу (6.3) в виде

$$\mu_x = A + B \cdot c^x \;. \qquad (6.6)$$

Это уточнение вводило два фактора, влияющих на смертность. Первый, представленный константой A, соответствовал смертности от внешних, не связанных со старением, причин, например, от несчастных случаев и т.п. Второй, экспоненциальный, член соответствовал, как и в законе Гомпертца, фактору, связанному с "естественной" смертностью.

В дальнейшем (1869 г.) Мейкем ввел еще один линейный член, так что закон смертности принял вид

$$\mu_x = A + H \cdot x + B \cdot c^x \;.$$

Наконец, в 1931 году Перкс предложил формулу

$$\mu_x = \frac{A + B \cdot c^x}{K \cdot c^{-x} + D \cdot c^x + 1} \;.$$

Попытки построить одну универсальную формулу смертности, дающую хорошее приближение для всего диапазона возрастов, не увенчались успехом. Различные законы дают разную степень точности для различных возрастных групп. Поэтому на практике используют кусочные комбинации этих выражений.

Пример.

6.1. Найти вероятность $_5 q_{30}$, исходя из закона де Муавра, с предельным возрастом 100 лет.

Решение:

Поскольку в этом примере $\omega = 100$, то функция дожития будет иметь вид

$$s(x) = \frac{100 - x}{100} \;.$$

Искомая вероятность выражается через $s(x)$ следующим образом

$$_5 q_{30} = \frac{s(30) - s(35)}{s(30)} \;.$$

Тогда

$$_5 q_{30} = \frac{(100-30)-(100-35)}{(100-30)} = \frac{70-65}{70} = 0{,}07143 \;.$$