Вероятность суммарного иска, отрицательное биномиальное распределение

Индивидуальные иски из портфеля страховой компании принимают значения 1 и 2 с вероятностями 0,3 и 0,7 соответственно.
Количество исков в данном портфеле имеет отрицательное биноминальное распределение с функцией распределения

$$p(x) = \frac{\Gamma(x+k)}{\Gamma(x+1)\Gamma(k)} p^k q^x, \qquad x = 0, 1, 2, \dots$$

и параметрами $k = 3$ и $p = 0{,}3$.

Вычислите вероятность суммарного иска для данного портфеля при $n = 2$.

Варианты ответа:

а) 0,03

б) 0,04

в) 0,05

г) 0,06

д) 0,07

Сумма баллов: 3

Решение:

$$S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_{N-1} + X_N$$

По формуле полной вероятности сначала имеем

$$P[S_N = 2] =$$

$$= P(S_N = 2 | N = 0)\ P(N = 0) +$$

$$+P(S_N = 2 | N = 1)\ P(N = 1) +$$

$$+P(S_N = 2 | N = 2)\ P(N = 2) + \dots =$$

По условию значения N могут быть равны только 1 и 2, поэтому откинем лишнее:

$$= P(S_N = 2 | N = 1)\ P(N = 1) + P(S_N = 2 | N = 2)\ P(N = 2) = \qquad (*)$$

Теперь подготовим каждый из сомножителей. Первая пара:

$$P(S_N = 2 | N = 1) = 0{,}7$$

$$P(N = 1) = \frac{\Gamma(x+k)}{\Gamma(x+1)\Gamma(k)} p^k q^x =$$

$$= \frac{\Gamma(1+3)}{\Gamma(1+1)\Gamma(3)}\ 0{,}3^3\ \ (1-0{,}3)^1 =$$

$$= \frac{3!}{1!\ 2!}\ 0{,}3^3\ \ (1-0{,}3)^1 = 0{,}567$$

Вторая пара:

$$P(S_N = 2|N = 2) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$$

$$P[N = 2] = \frac{\Gamma(2+3)}{\Gamma(2+1)\Gamma(3)}\ 0{,}3^3\ \ (1-0{,}3)^2 =$$

$$= \frac{4!}{2!\ 2!} \cdot 0{,}027 \cdot 0{,}49 = 0{,}07938$$

Возвращаясь в $(*)$, получаем ответ:

$$P(S_N = 2) = 0{,}7 \cdot P(N = 1) + 0{,}3^2 \cdot P(N = 2) =$$
$$= 0{,}7 \cdot 0{,}567 + 0{,}09 \cdot 0{,}07938 = 0{,}0468342$$

Округляем до 0,05, получаем B.

Ответ: B

[3-44-3]

□